

## Лекция 10

### ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В лекции 8 при построении МКЭ для уравнения Пуассона на плоскости были использованы простейшие треугольные конечные элементы с тремя узлами в вершинах и линейными функциями формы. Будем их называть *линейными треугольными элементами*. Эти элементы явились обобщением на двумерный случай двухточечных конечных элементов из лекции 3, образующих конечноэлементное пространство кусочно-линейных непрерывных функций  $S_1^h$ . В лекции 6 мы увидели, что функции формы конечного элемента могут быть не только линейными, но и квадратичными и вообще полиномиальными. Для описания этих элементов потребовалось лишь введение дополнительных узлов с сохранением узлов на концах элементов, что обеспечило непрерывность приближенного решения. Точно такая же ситуация имеет место и в двумерном случае. Треугольные элементы могут быть не только линейными, но квадратичными, кубическими и т.д. И здесь для их описания требуется введение дополнительных узлов. Так как, например, квадратичная функция на плоскости однозначно определяется своими значениями в шести точках, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, то узлы квадратичного треугольного элемента можно расположить в вершинах треугольника и в серединах его сторон. Как и в случае квадратичных элементов на отрезке

(лекция 6), расположение узлов в серединах сторон не является необходимым, но удобно с точки зрения симметрии. Убедитесь, что расположение узлов в вершинах треугольника и по одному на каждой стороне — единственная возможность обеспечения непрерывности конечноэлементного пространства кусочно-квадратичных функций.

## 1. Квадратичные и кубические треугольные элементы

Пусть узлы треугольного элемента пронумерованы как на рис. 1. Построим его функции формы.

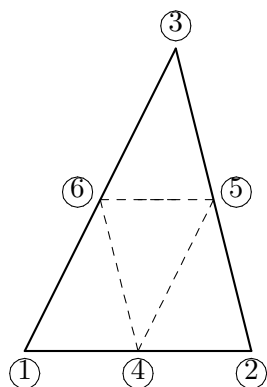


Рис. 1

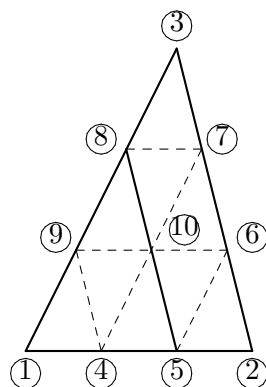


Рис. 2

Поскольку каждая функция формы отлична от нуля лишь в одном узле и там принимает значение единица, то, например,  $\varphi_1$  должна

- 1° обращаться в нуль в узлах 2, 5 и 3,
- 2° обращаться в нуль в узлах 4 и 6,
- 3° быть равной единице в узле 1.

Для удовлетворения условий 1° достаточно, чтобы в представление  $\varphi_1$  присутствовал множитель  $\zeta_1$  (барицентрическая координата — см. лекцию 8). Условие 2° будет выполнено, если в представление  $\varphi_1$  присутствует множитель  $(\zeta_1 - 1/2)$ . Теперь осталось домножить произведение  $\zeta_1(\zeta_1 - 1/2)$  на постоянную, чтобы удовлетворить 3°. Поскольку барицентрические координаты суть линейные функции декартовых координат  $x$  и  $y$ , то построенное произведение есть квадратичная функция и следовательно  $\varphi_1 = 2\zeta_1(\zeta_1 - 1/2)$ . Аналогично находим, что

$$\varphi_i = 2\zeta_i(\zeta_i - 1/2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

С остальными функциями формы еще проще: каждая из них должна обращаться в нуль на двух сторонах треугольника, не содержащих узла, отвечающего этой функции. Поэтому

$$\varphi_4 = 4\zeta_1\zeta_2, \quad \varphi_5 = 4\zeta_2\zeta_3, \quad \varphi_6 = 4\zeta_3\zeta_1. \quad (2)$$

Точно так же строятся кубические треугольные элементы, число узлов которых должно быть равным десяти. Располагаются узлы следующим образом: в вершинах треугольников, по два на сторонах и один внутри. Из соображений симметрии на каждой стороне узлы целесообразно расположить равноудаленными, а внутренний узел — в центре тяжести треугольника. Такое расположение узлов изображено на рис. 2. Очевидно, что первые три функции формы задаются соотношениями

$$\varphi_i = 9/2\zeta_i(\zeta_i - 2/3)(\zeta_i - 1/3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Что касается, например,  $\varphi_4$ , то она должна обращаться в нуль на прямых, содержащих изображенные на рис. 2 жирными сплошными линиями отрезки, а  $\varphi_{10}$  должна обращаться в нуль на всех сторонах. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= 27/2\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 - 1/3), & \varphi_5 &= 27/2\zeta_1\zeta_2(\zeta_2 - 1/3), \\ \varphi_6 &= 27/2\zeta_2\zeta_3(\zeta_2 - 1/3), & \varphi_7 &= 27/2\zeta_2\zeta_3(\zeta_3 - 1/3), \\ \varphi_8 &= 27/2\zeta_3\zeta_1(\zeta_3 - 1/3), & \varphi_9 &= 27/2\zeta_3\zeta_1(\zeta_1 - 1/3), \\ \varphi_{10} &= 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3. \end{aligned}$$

## 2. Матрицы жесткости квадратичного элемента

Вычислим матрицу жесткости *квадратичного треугольного элемента*, определяемую билинейной формой

$$\int_{e^{(i)}} [\nabla v^h]^T [\nabla u^h] dx dy,$$

т.е. отвечающую оператору Лапласа. Пусть  $(x_j, y_j)$  — декартовы координаты  $j$ -ой вершины треугольника  $e^{(i)}$  (см. рис. 1),  $S$  — площадь этого

треугольника, а  $\Phi^{(i)} = [\varphi_1, \dots, \varphi_6]$  - матрица функций формы элемента  $e^{(i)}$ . Из (1), (2) с учетом (8.14) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} &= \frac{a_j}{2S}(4\zeta_j - 1), \\ \frac{\partial \varphi_{3+j}}{\partial x} &= \frac{2}{S}(a_{j+1}\zeta_j + a_j\zeta_{j+1}), \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где согласно (8.13), (8.15)  $a_j = y_{j+1} - y_{j+2}$ , а суммирование в индексах  $y$   $\zeta_j, a_j, y_j$  осуществляется по модулю три. Поэтому

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & C_{112} & C_{123} & C_{131} \\ & A_{22} & A_{23} & C_{212} & C_{223} & C_{231} \\ & & A_{33} & C_{312} & C_{323} & C_{331} \\ & & & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & & & & B_{22} & B_{23} \\ & & & & & B_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \frac{a_k a_l}{4S^2}(4\zeta_k - 1)(4\zeta_l - 1), \\ B_{kl} &= \frac{4}{S^2}(a_k \zeta_{k+1} + a_{k+1} \zeta_k)(a_l \zeta_{l+1} + a_{l+1} \zeta_l), \\ C_{jkl} &= \frac{a_j}{S^2}(4\zeta_j - 1)(a_k \zeta_l + a_l \zeta_k) = C_{jlk}. \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования барицентрического одночлена (8.17), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} A_{kk} dx dy &= \frac{a_k^2}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (4\zeta_k - 1)^2 dx dy = \frac{a_k^2}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (16\zeta_k^2 - 8\zeta_k + 1) dx dy = \frac{a_k^2}{4S}, \\ \int_{e^{(i)}} A_{kl} dx dy &= \frac{a_k a_l}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (16\zeta_k \zeta_l - 4\zeta_k - 4\zeta_l + 1) dx dy = -\frac{a_k a_l}{12S}, \quad k \neq l. \end{aligned}$$

Далее, при  $j = k \neq l$

$$\int_{e^{(i)}} C_{kkk} dx dy = \frac{a_k}{S^2} \int_{e^{(i)}} (4a_k \zeta_k \zeta_l - a_k \zeta_l + 4a_l \zeta_k^2 - a_l \zeta_k) dx dy = \frac{a_k a_l}{3S},$$

а при  $j \neq k \neq l \neq j$

$$\int_{e^{(i)}} C_{jkl} dx dy = \frac{a_j}{S^2} \int_{e^{(i)}} (4a_k \zeta_j \zeta_l - a_k \zeta_l + 4a_l \zeta_j \zeta_k - a_l \zeta_k) dx dy = 0.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} B_{kk} dx dy &= \frac{4}{S^2} \int_{e^{(i)}} (a_k \zeta_{k+1} + a_{k+1} \zeta_k)^2 dx dy = \frac{2}{S} (a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_k a_{k+1}) = \\ &= \frac{1}{S} (a_k^2 + a_{k+1}^2 + (a_k + a_{k+1})^2) = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{S}, \end{aligned}$$

ибо согласно (8.16)  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ , а

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} B_{12} dx dy &= \frac{4}{S^2} \int_{e^{(i)}} (a_1 \zeta_2 + a_2 \zeta_1)(a_2 \zeta_3 + a_3 \zeta_2) dx dy = \\ &= \frac{1}{3S} (a_1 a_2 + a_2^2 + 2a_1 a_3 + a_2 a_3) = \frac{2a_1 a_3}{S} \end{aligned}$$

и поэтому

$$\int_{e^{(i)}} B_{13} dx dy = \frac{2a_2 a_3}{S}, \quad \int_{e^{(i)}} B_{23} dx dy = \frac{2a_1 a_2}{S}.$$

Итак, матрица жесткости квадратичного треугольного элемента, отвечающая билинейной форме  $\int_{e^{(i)}} \partial v^h / \partial x \partial u^h / \partial x dx dy$ , есть

$$K^{(i)}(a) = \frac{1}{12S} \times \begin{bmatrix} 3a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 & 4a_1 a_2 & 0 & 4a_1 a_3 \\ -a_1 a_2 & 3a_2^2 & -a_2 a_3 & 4a_1 a_2 & 4a_2 a_3 & 0 \\ -a_1 a_3 & -a_2 a_3 & 3a_3^2 & 0 & 4a_2 a_3 & 4a_1 a_3 \\ 4a_1 a_2 & 4a_1 a_2 & 0 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & 8a_1 a_3 & 8a_2 a_3 \\ 0 & 4a_2 a_3 & 4a_2 a_3 & 8a_1 a_3 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & 8a_1 a_2 \\ 4a_1 a_2 & 0 & 4a_1 a_3 & 8a_2 a_3 & 8a_1 a_2 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, что матрицей жесткости для  $\int_{e^{(i)}} \partial v^h / \partial y \partial u^h / \partial y dx dy$  является матрица  $K(b)$ , которая отличается от  $K(a)$  лишь тем, что у нее всюду вместо  $a_j$  стоят  $b_j$  (см. (8.13), (8.15)), а полная матрица жесткости конечного элемента  $e^{(i)}$ , отвечающая оператору Лапласа есть

$$K^{(i)} = K^{(i)}(a) + K^{(i)}(b).$$

Эту матрицу, как и матрицу (8.21) линейного треугольного элемента, можно записать в инвариантном виде, то есть в виде, не зависящем от расположения треугольника  $e^{(i)}$  на плоскости  $Oxy$

$$K^{(i)} = \frac{1}{12S} \times \begin{bmatrix} 3l_1^2 & l_1l_2 \cos \theta_3 & l_1l_3 \cos \theta_2 & -4l_1l_2 \cos \theta_3 & 0 & -4l_1l_3 \cos \theta_2 \\ & 3l_2^2 & l_2l_3 \cos \theta_1 & -4l_1l_2 \cos \theta_3 & -4l_2l_3 \cos \theta_1 & 0 \\ & & 3l_3^2 & 0 & -4l_2l_3 \cos \theta_1 & -4l_1l_3 \cos \theta_2 \\ & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) & -8l_1l_3 \cos \theta_2 & -8l_2l_3 \cos \theta_1 \\ & & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) & -8l_1l_2 \cos \theta_3 \\ & & & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \end{bmatrix}.$$

Приведем вид матрицы массы треугольного квадратичного элемента

$$M^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} \Phi^{(i)} dx dy = \frac{S}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

### 3. Прямоугольные конечные элементы

Пусть область  $\Omega$ , в которой требуется найти решение той или иной задачи, является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, или композицией таких прямоугольников. Эту область легко триангулировать конечными элементами в виде прямоугольников, стороны которых также параллельны координатным осям. Простейшим прямоугольным элементом является *билинейный элемент* с узлами в вершинах. Благодаря оговоренной ориентации элемента относительно осей

координат билинейная функция, определенная на элементе, на его сторонах становится линейной и полностью определяется своими значениями в узлах, принадлежащих соответствующим сторонам. Это обеспечивает непрерывность кусочно-билинейной функции, определяемой на композиции конечных элементов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если бы стороны конечных элементов не были параллельны координатным осям, то заданная на конечном элементе билинейная функция  $v(x, y) = a + bx + cy + dxy$  при сужении на его границу была бы не линейной вдоль стороны, а квадратичной, и двух ее значений в вершинах элемента, принадлежащих этой стороне, было бы недостаточно для ее однозначного определения. А это, в свою очередь, привело бы к тому, что кусочно-билинейная функция, определяемая своими узловыми значениями в вершинах элементов, на композиции конечных элементов была бы разрывной.

Построим функции формы прямоугольного билинейного элемента со сторонами, параллельными координатным осям. На рис. 3 изображен реперный прямоугольный элемент с узлами в вершинах. Функции формы на этом элементе

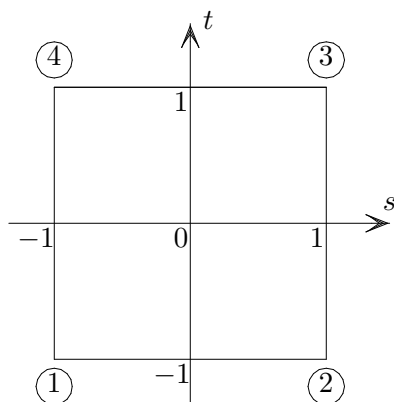


Рис. 3

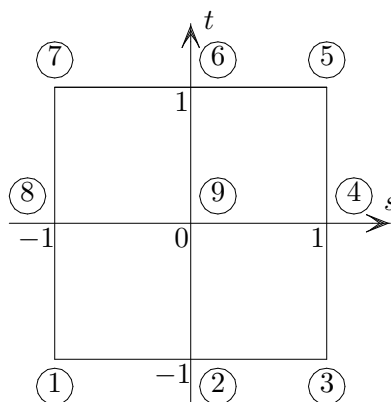


Рис. 4

определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t), & \varphi_2(s, t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t), \\ \varphi_3(s, t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t), & \varphi_4(s, t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что для произвольного прямоугольного конечного элемента

$$e^{(i,j)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

функции формы получаются из (6) путем замены переменных

$$\frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}/2} = s + 1, \quad \frac{y - y_{j-1}}{h^{(j)}/2} = t + 1, \quad (7)$$

где  $h^{(i)} = x_i - x_{i-1}$ ,  $h^{(j)} = y_j - y_{j-1}$ , т.е.

$$\varphi_k^{(i,j)} = \varphi_k \left( \frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}/2} - 1, \frac{y - y_{j-1}}{h^{(j)}/2} - 1 \right).$$

Наряду с билинейными прямоугольными конечными элементами можно ввести в рассмотрение *биквадратичные*, бикубические и вообще биполиномиальные прямоугольные элементы. На рис. 4 изображен реперный прямоугольный элемент с девятью узлами, расположенными в вершинах, в серединах сторон и в центре. Не составляет труда выписать функции формы этого элемента.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(s-1)s(t-1)t, & \varphi_2 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t-1)t, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(s+1)s(t-1)t, & \varphi_4 &= \frac{1}{2}(s+1)s(1-t^2), \\ \varphi_5 &= \frac{1}{4}(s+1)s(t+1)t, & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t+1)t, \\ \varphi_7 &= \frac{1}{4}(s-1)s(t+1)t, & \varphi_8 &= \frac{1}{2}(s-1)s(1-t^2), \\ \varphi_9 &= (1-s^2)(1-t^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотренные нами билинейный и биквадратичный прямоугольные конечные элементы относятся к семейству полных биполиномиальных элементов: функция, заданная на элементе, есть произведение многочлена от одной переменной на многочлен от другой переменной. Помимо таких элементов в вычислительной практике встречаются и, так называемые, неполные биполиномиальные элементы, у которых в представлении функции на элементе отсутствуют некоторые члены из имеющихся у полного элемента (например, член с  $x^2y^2$ , имеющийся у биквадратичного



элемента). Неполные элементы имеют меньшее по сравнению с полными элементами число степеней свободы и соответственно меньшее число узлов. Но здесь есть важное ограничение: для того, чтобы не нарушить непрерывность кусочно-биномиальной функции, задаваемой своими значениями в узлах, на композиции конечных элементов, нельзя трогать узлы, расположенные на границе элемента. Поэтому неполный биквадратичный элемент обязан иметь восемь узлов и все на границе, а у неполного бикубического элемента число узлов может быть от пятнадцати до двенадцати (только на границе). Неполные элементы, у которых узлы расположены только на границе, образуют так называемое сирендипово семейство. На рис. 5 изображен реперный прямоугольный элемент с восемью узлами на сторонах. Построим его функции формы. Для этого воспользуемся функциями формы полного

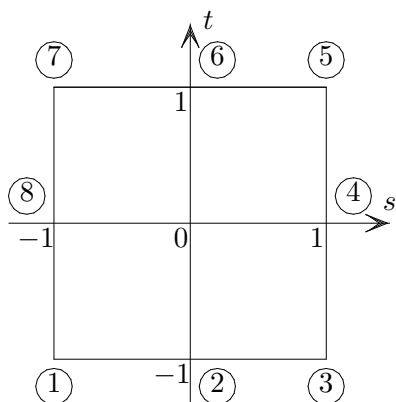


Рис. 5

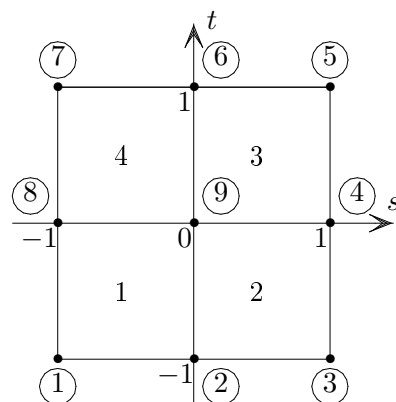


Рис. 6

биквадратичного элемента (8). Однако, без дополнительных предположений однозначно функции формы неполного элемента определить нельзя. Поэтому будем, например, требовать, чтобы представление функции на конечном элементе в отличие от биквадратичной функции не содержало члена с наивысшей степенью по  $s$  и  $t$  в последней, т.е. члена  $s^2t^2$ . Функции формы сирендипова восьмиточечного элемента, изображенного на рис. 5, как обычно, будем обозначать через  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , а на функции формы (8) биквадратичного элемента будем ссылаться как на  $\tilde{\varphi}_k$ ,  $k = 1, \dots, 9$ . Интересующие нас функции формы будем искать в виде  $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k + \alpha_k \tilde{\varphi}_9$ , где постоянная  $\alpha_k$  выбирается из тех соображений,

чтобы в  $\varphi_k$  отсутствовал член  $s^2t^2$ . Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \tilde{\varphi}_1 + \alpha_1 \tilde{\varphi}_9 = \frac{1}{4}(s-1)s(t-1)t + \alpha_1(1-s^2)(1-t^2) = \\ &= (s-1)(t-1) \left[ \frac{st}{4} + \alpha_1(1+s+t+st) \right].\end{aligned}$$

Отсюда находим, что требуемое значение  $\alpha_1 = -1/4$  и поэтому

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4}(s-1)(t-1)(1+s+t).$$

Аналогично находятся и остальные функции формы

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{1}{2}(1-s^2)(t-1), & \varphi_3 &= \frac{1}{4}(s+1)(t-1)(1-s+t), \\ \varphi_4 &= \frac{1}{2}(s+1)(1-t^2), & \varphi_5 &= -\frac{1}{4}(s+1)(t+1)(1-s-t), \\ \varphi_6 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t+1), & \varphi_7 &= \frac{1}{4}(s-1)(t+1)(1+s-t), \\ \varphi_8 &= -\frac{1}{2}(s-1)(1-t^2).\end{aligned}$$

#### 4. Матрица жесткости билинейного элемента

Построим матрицу жесткости билинейного элемента, отвечающую оператору Лапласа. Пусть  $x_i - x_{i-1} = h^{(i)} = h_1$ ,  $y_j - y_{j-1} = h^{(j)} = h_2$ ,  $\Phi^{(i,j)}$  — матрица функций формы, а

$$K_1^{(i,j)} = \int_{e^{(i,j)}} \left[ \frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial x} \right] dx dy.$$

Делая в интеграле замену переменных (7), находим, что

$$K_1^{(i,j)} = \frac{h_2}{h_1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \partial \varphi_1 / \partial s \\ \partial \varphi_2 / \partial s \\ \partial \varphi_3 / \partial s \\ \partial \varphi_4 / \partial s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial s} \end{bmatrix} ds dt. \quad (9)$$

Из (6)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = -\frac{1-t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} = \frac{1-t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} = \frac{1+t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial s} = -\frac{1+t}{4}$$

и, следовательно,

$$K_1^{(i,j)} = \frac{h_2}{6h_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим, что

$$K_2^{(i,j)} = \int_{e^{(i,j)}} \left[ \frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial y} \right]^T \left[ \frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial y} \right] dx dy = \frac{h_1}{6h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

а полная матрица жесткости билинейного элемента  $e^{(i,j)}$  при  $h_1 = h_2$

$$K^{(i,j)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Найдем глобальную матрицу жесткости для квадратной области, разбитой на четыре квадратных конечных элемента и изображенной на рис. 6. Согласно рисункам 3 и 6 матрица индексов имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из (10) находим, что глобальная матрица жесткости

$$K_{(f)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 8 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}.$$

Последняя строка этой матрицы определяет уравнение, отнесенное к узлу 9 на рис. 6, левая часть которого есть

$$-\frac{1}{3}[(u_1 - 2u_2 + u_3) - 2(u_8 - 2u_9 + u_4) + (u_5 - 2u_6 + u_7) + \\ + 3(u_2 - 2u_9 + u_6) + 3(u_8 - 2u_9 + u_4)].$$

Если неизвестные обозначить через  $u_{i,j}$ , где  $(x_i, y_j)$  — координаты узлов, то после деления на  $h^2$  это выражение можно записать в виде

$$-[u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} + \frac{h^2}{3}u_{\bar{x}x\bar{y}y}]_{ij}. \quad (11)$$

## 5. Упражнения

1. Убедиться, что для матриц (4) и (5) справедливы утверждения 6.1 и 6.2, соответственно.
2. Найти вектор нагрузки квадратичного элемента, предполагая, что  $f(x, y) = \text{const}$  при  $(x, y) \in e^{(i)}$ .
3. При том же условии, что и в задаче 2, найти вектор нагрузки билинейного элемента.
4. Построить матрицу массы биквадратичного элемента.